

Сглаживание кривой доходности: Нельсон-Зигель против сплайновых методик, Часть 4

Шон Кляйн (Sean Klein) и Дональд Р. ван Девентер (Donald R. van Deventer)¹
18 августа 2009 г.

В частях 1, 2 и 3 этого цикла заметок мы в общих чертах обрисовали плюсы и минусы подхода Нельсона и Зигеля к сглаживанию кривой доходности и сравнили его с подходом, основанном на сплайнах, преобладающем в таких нефинансовых приложениях, как компьютерная графика и компьютерная анимация. Во 2-й части, мы привели пример с решением, иллюстрирующий методику Нельсона-Зигеля. В 3-й части, мы показали, как метод максимальной гладкости в применении к задаче о форвардном курсе может быть использован для того, чтобы улучшить результаты, достигаемые методом Нельсона-Зигеля как с точки зрения их точности при подгонке наблюдаемых курсов облигаций, так и с точки зрения достигаемой им гладкости форвардных курсов. В сегодняшней заметке, мы покажем с использованием нескольких простых примеров, что методика Нельсона-Зигеля в применении к функциональной форме форвардного курса слишком проста для того, чтобы быть стандартом точности при определении рыночных цен для реалистичных форм кривых форвардного курса.

В 2-й части, мы обсудили, как функция Нельсона-Зигеля для нулевого купона,

$$y(t) = \alpha + (\beta + \gamma) \frac{\delta}{t} \left(1 - \exp\left(\frac{-t}{\delta}\right)\right) - \gamma \exp\left(\frac{-t}{\delta}\right),$$

может быть подогнана к наблюдаемым рыночным данным на примере трёх облигаций федерального займа Российской Федерации. Мы также заметили, что непрерывная функция форвардного курса может быть выведена из функции кривой доходности при помощи следующей формулы из главы 8 книги “Продвинутые методы управления финансовым риском” (ван Девентер, Имаи и Меслер, Издательский дом John Wiley & Sons, 2004)²:

$$f(t) = y(t) + ty'(t)$$

¹ Перевод на русский Александра и Луизы Тельновых

² Donald R. van Deventer, Kenji Imai, and Mark Mesler, Advanced Financial Risk Management, John Wiley & Sons, 2004.

При оценке функции форвардного курса для кривой доходности Нельсона-Зигеля, мы находим, что непрерывные форвардные курсы следуют очень простой функциональной форме:

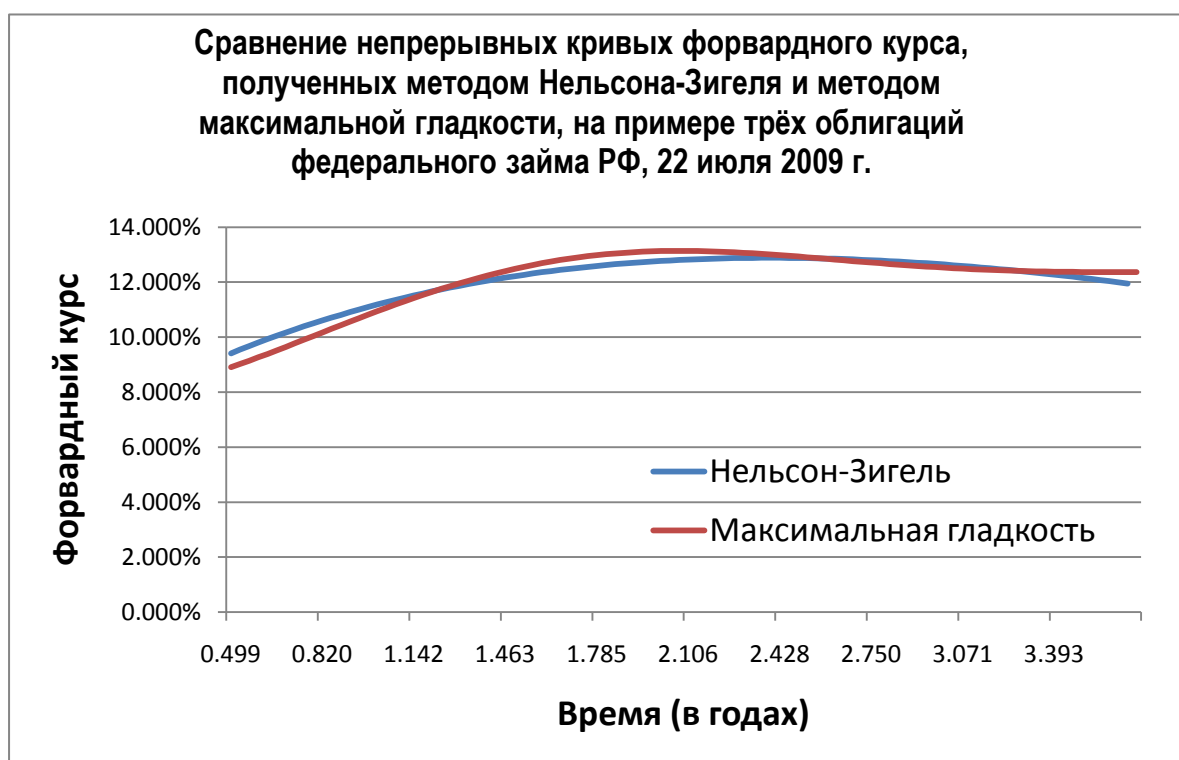
$$f(t) = \alpha + \exp\left[\frac{-t}{\delta}\right] \left[\beta + \frac{\gamma}{\delta} t\right]$$

С другой стороны, метод максимальной гладкости для подгонки наблюдаемых курсов облигаций с максимальной точностью и гладкостью форвардного курса использует многочлены четвёртой степени, склеенные между собой. При этом пользователь выбирает количество сегментов, которые он хочет использовать, а также граничные условия на левом и правом краях кривой форвардного курса (соответствующих самой ранней и самой поздней датам платежа):

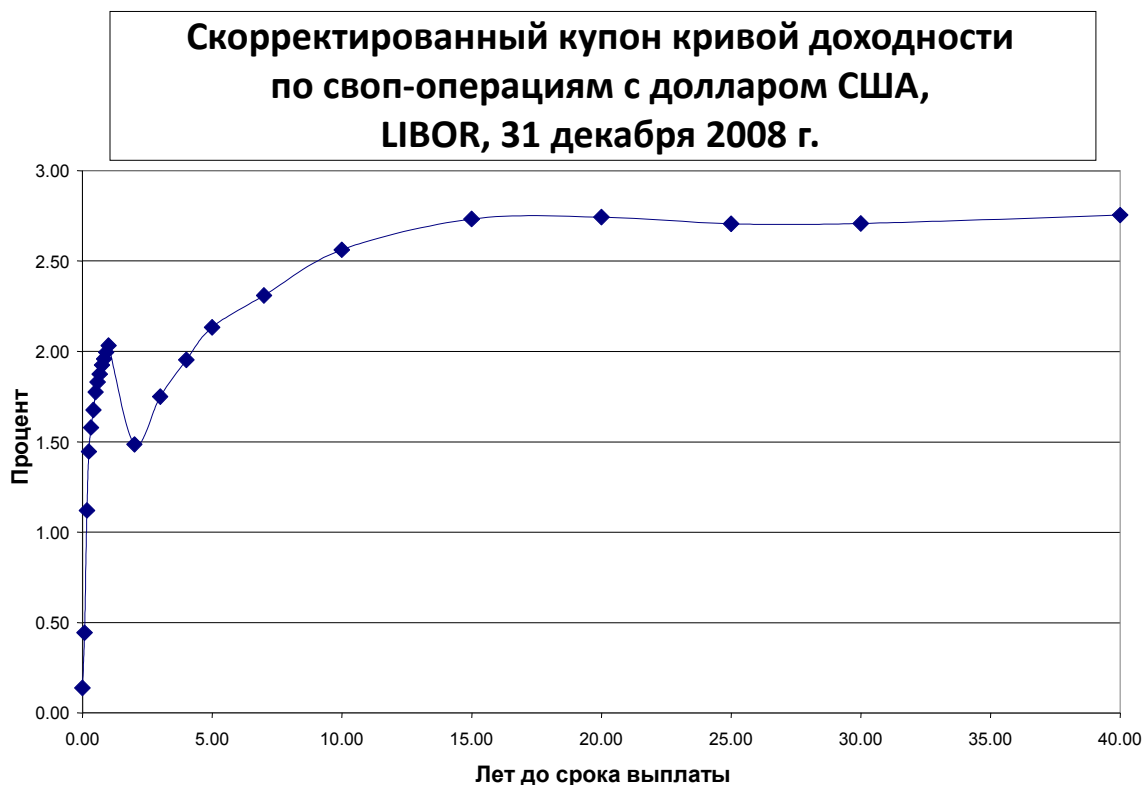
$$f(t) = a_i + b_i t + c_i t^2 + d_i t^3 + e_i t^4$$

В примере из частей 2 и 3, мы использовали в качестве исходных данных для процесса сглаживания три конкретные облигации федерального займа Российской Федерации. Мы использовали два сегмента линии при подгонке к этим данным функции форвардного курса с максимальной гладкостью. Поскольку количество использованных цен на облигации было настолько малым, функции форвардного курса, являющиеся результатом применения обоих методов, оказались очень похожими, причём обе имели высокую степень гладкости:

Кривая форвардного курса, получающаяся при применении метода максимальной гладкости, становится плоской на правом краю графика по той причине, что мы наложили такое ограничение на процесс подгонки. Сравнение этих двух кривых может привести некоторых к ошибочному заключению, что эти два метода в разумной степени эквивалентны – тем не менее, такое заключение было бы очень далеко от истины.



Поскольку в процессе сглаживания мы использовали курсы только трёх облигаций, данные не могли выявить никаких изгибов и поворотов в кривой доходности. Рассмотрим более сложный набор курсов из статистического отчёта Н15 Правления Федеральной резервной системы США об обменных операциях с долларом США за 31 декабря 2008 г.:



Сглаживание на этом графике – это просто интерполяция, встроенная в стандартное программное обеспечение по работе с электронными таблицами. Тем не менее, этот график отчётливо показывает, что последовательность из изгибов и поворотов в графике курса возможна даже на настолько «глубоком» рынке капитала, как рынок доллара США.

Метод максимальной гладкости форвардного курса ВСЕГДА способен точно подогнать фактические данные (при условии, что эти данные безошибочны). Если у нас имеется N отдельных исходных точек, это достигается использованием метода «максимальной гладкости» с $N+1$ сегментами кривой. Если количество точек велико или если объём обрабатываемых данных велик, то выполняющий эти вычисления программный код встроен в изодренную программную систему по управлению риском в масштабе предприятия.

Притом что метод максимальной гладкости в точности подгоняет данные, то как же справляется с этим метод Нельсона-Зигеля, ограниченный простой функцией форвардного курса на протяжении всего спектра платёжных сроков?

$$f(t) = \alpha + \exp\left[\frac{-t}{\delta}\right] \left[\beta + \frac{\gamma}{\delta} t \right]$$

Несколько простых примеров покажут, что рабочие характеристики метода Нельсона-Зигеля недостаточно точны для того, чтобы удовлетворить обычным установившимся практикой стандартам управления риском – или же для оценки стоимости в соответствии со Стандартом финансовой отчётности FAS 157. В этих примерах, предположим, что мы состоим в близком родстве с Господом Богом, и что нам даны «истинные» непрерывные форвардные курсы для сроков платежей в 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10 лет. Срок «0» - это, конечно, срок в 1 день. Затем, мы применим нелинейную процедуру оптимизации, включенную в стандартное программное обеспечение по работе с электронными таблицами, и с её помощью определим «наилучшие» значения переменных параметров альфа, бета, гамма и дельта, максимизирующие степень согласия подгоночной функции Нельсона-Зигеля с данными. (Разумеется, метод максимальной гладкости обеспечит идеальную подгонку всех точек в наблюдаемых данных.)

Рассмотрим пример №1 и соответствующие ему значения параметров Нельсона-Зигеля. В процессе минимизации суммы квадратов ошибок, мы умножили эти ошибки на 10^6 для того, чтобы процедура оптимизации в программе по работе с электронными таблицами не была подвержена ошибкам в округлении.

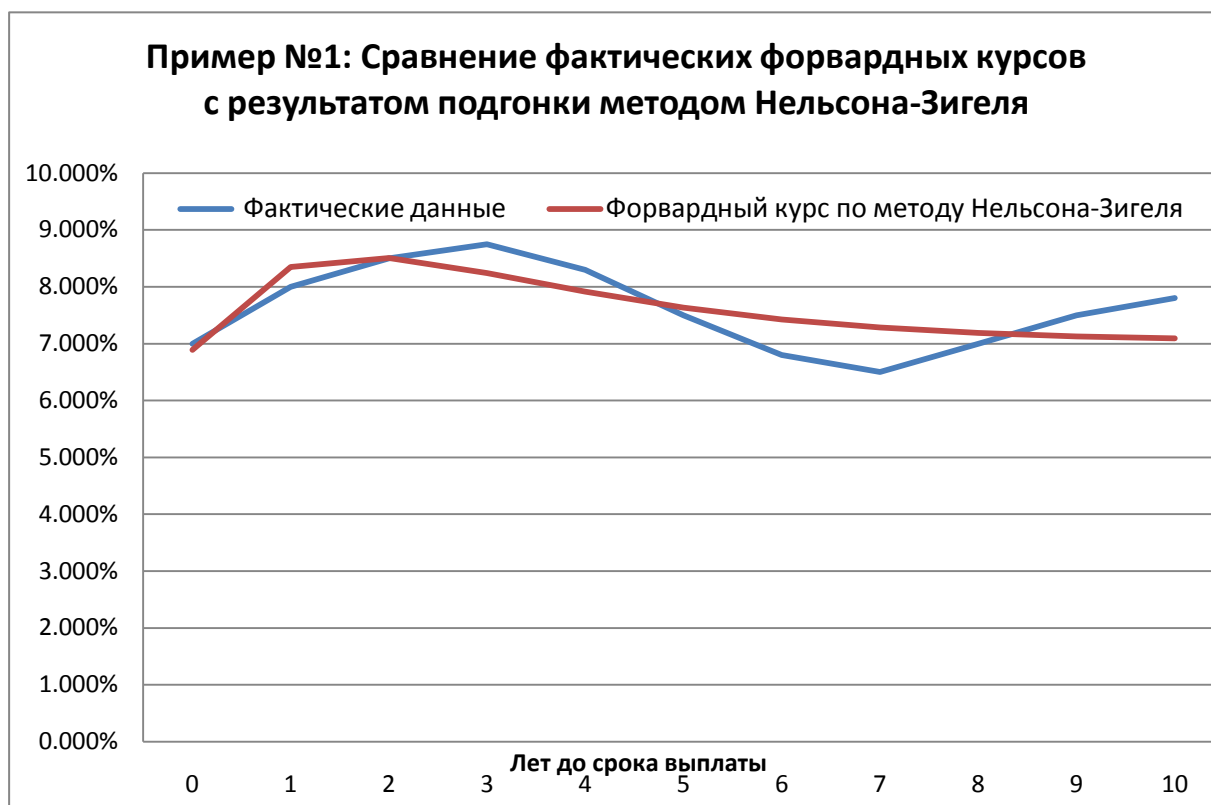
Пример №1

Параметры Нельсона-Зигеля

альфа	0.070353
бета	-0.00144
гамма	0.04199
дельта	1.6354

Сумма квадратов ошибок: 223.6035

Срок платежа, лет	Фактические данные	Форвардный курс по методу		Ошибка в квадрате $\times 10^6$
		Нельсона-Зигеля		
0	7.000%	6.892%		1.1713
1	8.000%	8.350%		12.2835
2	8.500%	8.505%		0.0022
3	8.750%	8.243%		25.7491
4	8.300%	7.913%		14.9936
5	7.500%	7.632%		1.7448
6	6.800%	7.425%		39.0101
7	6.500%	7.282%		61.1584
8	7.000%	7.188%		3.5513
9	7.500%	7.129%		13.7751
10	7.800%	7.092%		50.1642



Теперь мы можем изобразить фактические значения форвардного курса и сравнить их с теми, что мы подсчитали методом Нельсона-Зигеля. Обратите внимание, что мы соединили результаты подгонки форвардных курсов в сроки 0, 1, ..., 10 лет отрезками прямых линий. Пожалуйста, сфокусируйте своё внимание на значениях красной и синей ломаных в точках 0, 1, ..., 10, а не в промежутках между ними.

Достоинством подхода Нельсона и Зигеля является простота функциональной формы форвардного курса. К сожалению, эта функция чрезвычайно неточна даже в этом простом примере, в котором изгибы гораздо менее сильны, чем в приведённом выше графике за 31 декабря 2008 г.

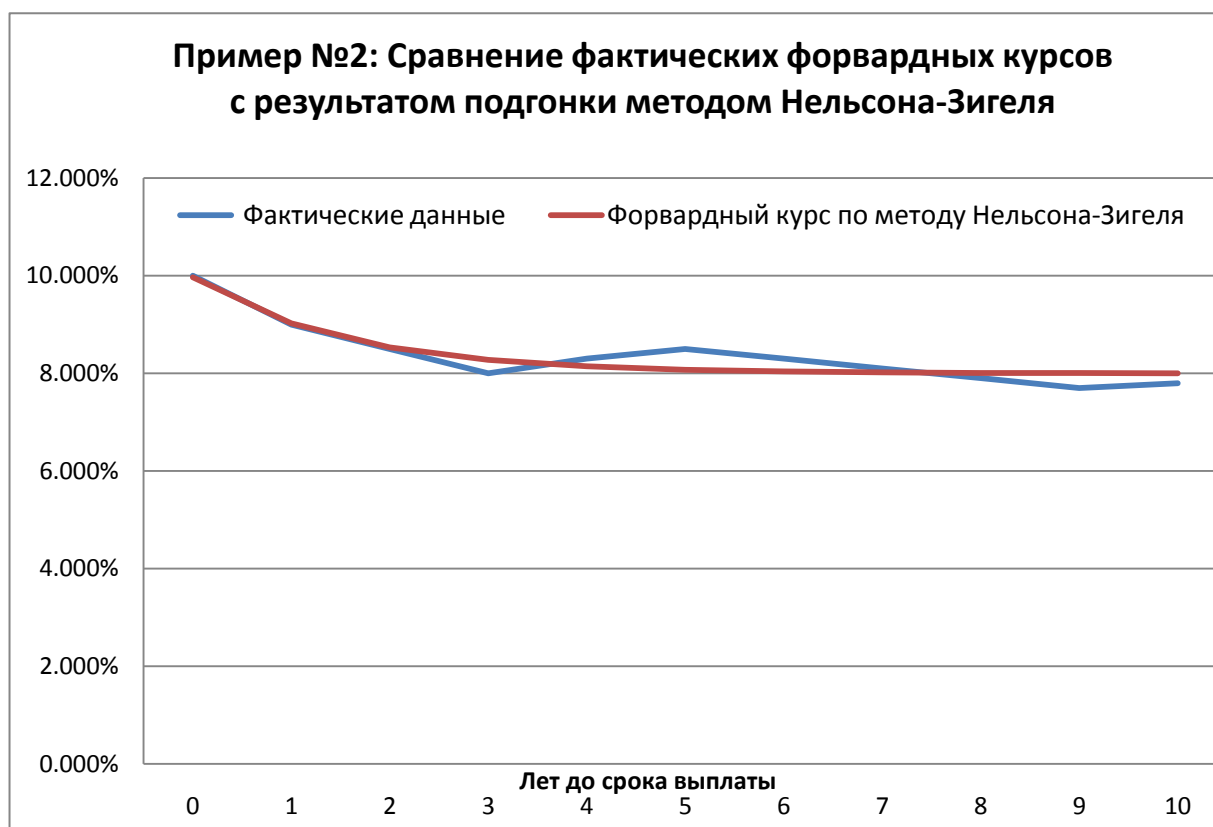
Пример №2 показывает другую распространённую форму кривой форвардного курса. Мы опять максимизируем степень согласия путём подбора оптимальных параметров Нельсона-Зигеля. Как и прежде, мы не можем добиться той идеальной подгонки, что обеспечивается методом максимальной гладкости.

Пример №2

Параметры Нельсона-Зигеля

альфа	0.079991
бета	0.019714
гамма	-5.7E-07
дельта	1.532272

Сумма квадратов ошибок: 50.5509

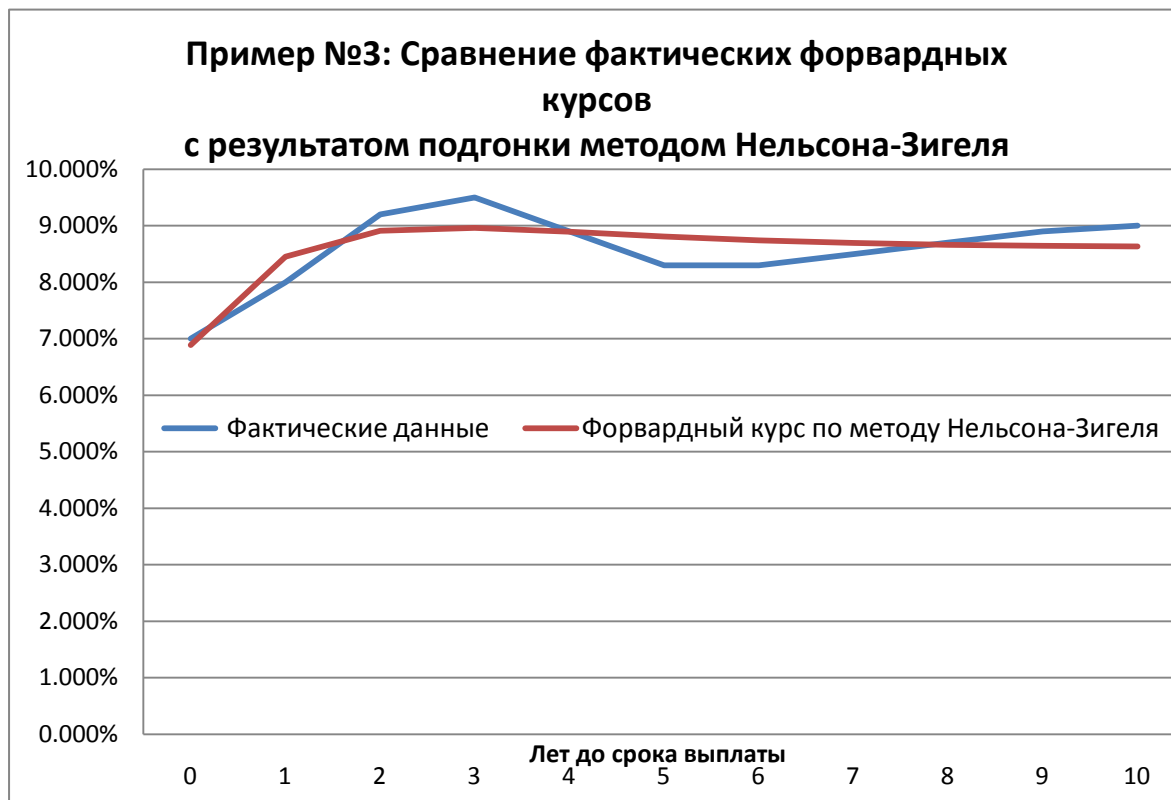


Срок платежа, лет	Фактические данные	Форвардный курс по методу Нельсона-Зигеля	Ошибка в квадрате $\times 10^6$
0	10.000%	9.970%	0.0871
1	9.000%	9.026%	0.0653
2	8.500%	8.534%	0.1126
3	8.000%	8.277%	7.6941
4	8.300%	8.144%	2.4334
5	8.500%	8.075%	18.1000
6	8.300%	8.038%	6.8434
7	8.100%	8.020%	0.6468
8	7.900%	8.010%	1.2050
9	7.700%	8.005%	9.2823
10	7.800%	8.002%	4.0809

Когда мы представим графически результаты, содержащиеся в этой таблице, мы увидим, что подгонка методом Нельсона-Зигеля хоть и выглядит лучше, чем в примере №1, но всё равно далека от точной.

Эти «неудачи» при подгонке ведут к ошибкам в калькуляции цен. Когда подогнанная кривая Нельсона-Зигеля используется при расчёте курсов облигаций, расчётный курс будет отличаться от фактического. Это означает, что измерение степени риска будет неправильным. Будет казаться, что существует благоприятная возможность для арбитража, то есть для спекуляции на разнице в курсах, в то время как на самом деле такой возможности нет.

Пример №3, другой вариант на ту же тему:



Пример №3

Параметры Нельсона-Зигеля

альфа	0.086159
бета	-0.01726
гамма	0.021352
дельта	1.512712

Сумма квадратов ошибок: 129.1544

Срок платежа, лет	Фактические данные	Форвардный курс по методу Нельсона-Зигеля	Ошибка в квадрате $\times 10^6$
0	7.000%	6.890%	1.2039
1	8.000%	8.454%	20.5857
2	9.200%	8.908%	8.5023
3	9.500%	8.961%	29.0332
4	8.900%	8.894%	0.0031
5	8.300%	8.811%	26.1617
6	8.300%	8.744%	19.6783

Honolulu

New York

Tokyo

London

7	8.500%	8.696%	3.8268
8	8.700%	8.664%	0.1284
9	8.900%	8.644%	6.5287
10	9.000%	8.633%	13.5024

Как и прежде, график демонстрирует плохое согласие между фактическими данными и значениями функции форвардного курса Нельсона-Зигеля в точках 0, 1, ..., 10 лет.

Короче говоря, подход Нельсона-Зигеля может привести к очень серьёзным ошибкам в оценке курсов ценных бумаг. Не забудем и о неудачах метода связок (копул), и о том, что ценность подвергается риску во время кредитного кризиса. По этим причинам, использование модели, про которую заранее известно, что она неточна, практически невозможно оправдать перед руководством, советом директоров и контролирующими инстанциями.

Мы считаем, что выводы из этого цикла статей в четырёх частях, проводящего сравнительный анализ подхода Нельсона-Зигеля и сплайновых методик, предельно ясны:

- Сплайновые методы в общем (и метод максимальной гладкости в частности) в применении к задаче о форвардном курсе превосходят метод Нельсона-Зигеля по двум критически важным параметрам: (а) точности в подгонке наблюдаемых курсов облигаций и других рыночных данных и (б) гладкости и разумности кривых форвардного курса при том, что кривая должна подгонять наблюдаемые данные.
- Кривые доходности центральных правительственных банков, полученные методом Нельсона-Зигеля, могут сильно отличаться от фактических курсов облигаций, используемых как входные данные для процесса сглаживания. Осмотрительный специалист по финансовому анализу должен отвергнуть использование данных, сглаженных методом Нельсона-Зигеля, в качестве входных данных для вычисления степени риска.
- Сглаживание методом Нельсона-Зигеля не является достаточно точным для использования в оценках по Стандарту финансовой отчётности FAS 157 и для другой важной отчётности о степени риска. Причиной для этого является большая величина возможных ошибок и склонность пользователей принимать результаты подгонки методом Нельсона-Зигеля за чистую монету, без проверки того, насколько этот результат хорош для каждого конкретного набора исходных данных. Именно это отсутствие «самоконтроля» лежало в основе во многом вызванного применением метода связок (копул) краха рынка облигаций, обеспеченных долговыми обязательствами, во время нынешнего финансового кризиса.

Некоторые финансовые аналитики могут спросить: «Хорошо, но что если мы работаем с плохими данными?» Это совершенно другая проблема, которая не должна нам мешать сконцентрироваться на сути вопроса, обсуждаемого в настоящем цикле заметок: даже когда мы имеем дело с хорошими данными, подход Нельсона-Зигеля неспособен описать их со стопроцентной точностью.

Мы будем рады услышать ваши комментарии и предложения. Присылайте их на адрес электронной почты info@kamakuraco.com

Шон Кляйн и Дональд Р. ван Девентер
Kamakura Corporation
Гонолулу, 18 августа 2009 г.